

## МАТЕМАТИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПОЛЕЙ АДВЕКТИВНОГО ПЕРЕНОСА ВОД И ВОССТАНОВЛЕНИЯ СКАЛЯРНЫХ ПОЛЕЙ

канд. геогр. наук В.Ю.БЕНЗЕМАН

ГНЦ РФ Арктический и антарктический научно-исследовательский институт, г. Санкт-Петербург, aaricoop@aari.nw.ru

*В работе предлагаются аналитически выведенные критерии возможности вычисления по уравнению адвекции с парной синхронизацией измеренных асинхронных гидрофизических полей на полигонах Мирового океана.*

*Ключевые слова:* критерии адвекции

Современное состояние вопроса о численных методах получения векторов течений с помощью скалярных полей гидрофизических элементов (температура, соленость и т.д.) не дает возможности достаточно точно вычислять поля течений. Построить точные гидродинамические модели при малоизученных физических аспектах этой проблемы пока не удается, тем более решать их аналитически, поэтому приходится вычислять поля течений по косвенным данным.

Для построения векторов циркуляции вод и дрейфа льда воспользуемся статистической моделью множественной регрессии в виде трехмерного полинома второго порядка [1]:

$$\hat{T}_i = f_i(x, y, t) = \sum_{l+j+k=0}^2 A_{ijk(i)} x^l y^j t^k, \quad (1)$$

где  $\hat{T}_i$  – оценка модели, т.е. вычисленное значение гидрофизического элемента по полиному с пространственными координатами  $x$ ,  $y$  и временной  $t$  в каждой  $i$ -й точке поля;  $A_{ijk}$  – коэффициенты полинома.

Неизвестные параметры, или коэффициенты  $A_{ijk}(i)$  полинома, оцениваются с помощью обобщенного «взвешенного» метода наименьших квадратов, соответственно,  $T_i$  – измеренные значения гидрофизического элемента в  $i$ -й точке.

Аппроксимация всех точек поля одним полиномом недостаточно точна, поэтому полином строится для каждой точки отдельно по ближайшим по времени и пространству точкам (измерениям).

$$\hat{T} = f(x, y, t) = \sum_i^N \sum_{l+j+k=0}^2 [A_{ijk} x^l y^j t^k]_i. \quad (2)$$

Этот алгоритм более подробно описан в работе [1]. После того как получена локально-интегральная (полиномиальная) модель (2), можно все измерения на гидрологической съемке (по горизонтам), по которой строилась модель, привести к двум моментам времени, например, к середине временного интервала съемки. То есть по измерениям в различные моменты времени сделать все данные съемки синхронными на два момента времени  $t_n$  и  $t_{n+1}$  [1].

В качестве примера точечной аппроксимации трехмерными степенными полиномами, а по ним синхронизации к двум моментам использовались данные о температуре воды гидрологической съемки полигона, выполненного в Северной Атлантике в июне–июле 1971 года [1].

Гидрологические станции, расположенные в узлах регулярной сетки с расстоянием между станциями 25 миль, выполнялись судном по «входной» спирали последовательно. На полигоне 49 станций и, следовательно, по 49 измерений температуры воды на различных горизонтах от поверхности до дна. Необходимо также отметить важное свойство приведенных полей – при парной синхронизации они дают возможность вычислять перенос вод в районе гидрологической съемки. Этот аспект будет использован в дальнейшем для вычисления течений по уравнению эволюции.

Для вычисления скоростей течения по гидрологическим данным гидрофизических полей нами была принята в качестве физической гипотезы идея о переносе свойств воды под влиянием течений в океане [2, 3].

Формально эта гипотеза записывается в виде уравнения адвекции (переноса, эволюции).

$$\frac{df}{dt} = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial t} + U \frac{\partial f}{\partial x} + V \frac{\partial f}{\partial y} + W \frac{\partial f}{\partial z} = 0. \quad (3)$$

Принимая во внимание сложность учета вертикальной координаты  $z$ , совместно с  $x$ ,  $y$  и временной  $t$ , очевидную малость вертикальной компоненты скорости, а также трудности ее параметризации, член уравнения адвекции  $W \frac{\partial f}{\partial z}$  не будем учитывать.

С помощью уравнения (3) и трехмерных аппроксимирующих полиномов (2) построим алгебраическую систему из двух уравнений, которая замыкается по своим неизвестным  $U$  и  $V$  путем использования его два раза – парной синхронизации на  $t_n$  и  $t_{n+1}$ , так как неизвестных два –  $U$  и  $V$ . Эта система имеет следующий вид [1]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\sum \mathbf{Ax})}{\partial t_n} + U \frac{\partial(\sum \mathbf{Ax})}{\partial x_p} + V \frac{\partial(\sum \mathbf{Ax})}{\partial y_p} &= 0, \\ \frac{\partial(\sum \mathbf{Ax})}{\partial t_{n+1}} + U \frac{\partial(\sum \mathbf{Ax})}{\partial x_{p+1}} + V \frac{\partial(\sum \mathbf{Ax})}{\partial y_{p+1}} &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $t_n$  и  $t_{n+1}$  – два ближайших момента (середина временного интервала) синхронизации всех измерений;  $p$  – номер точки;  $f$  – любая характеристика воды, которая моделируется с помощью уравнений множественной регрессии в виде квадратичного полинома  $\mathbf{Ax}$  (2).

При этом различие гидрофизических элементов во всех точках обоих синхронных полей  $\hat{Y}_{i(n)}$  и  $\hat{Y}_{i(n+1)}$  достаточно, поскольку за интервал времени  $t_{n+1} - t_n = t$  происходит перенос субстанции. Например, частица воды с фиксированной температурой в  $i$ -й точке в момент времени  $t_n$  за период  $t$  под воздействием течения перемещается по направлению движения этого потока. Найти траекторию этой частицы за период  $t$  – значит узнать скорость и направление течения в данной точке, а следовательно, при любом  $i$  и для любой другой точки поля.

Частные производные по  $t$ ,  $x$  и  $y$  вычисляются аналитически дифференцированием полинома (1) последовательно для каждой  $i$ -й и  $i+1$ -й точек на моменты времени  $t_n$  и  $t_n+1$ . Решая эти уравнения любыми известными методами, можно легко найти составляющие вектора течения  $U$  и  $V$ .

Точность определения скоростей течений может быть оценена по натурным наблюдениям на буйковых станциях во время съемки, а там, где их нет, — по косвенным данным. При этом точность аппроксимации (и точность синхронизации гидрофизического поля) не должна оказывать существенного влияния на точность вычисления  $U$  и  $V$ , т.к. составляющие скорости вычисляются по двум рядом лежащим точкам и по двум близким моментам синхронизации. Поэтому ошибки при использовании полинома (1) для обоих моментов времени, по-видимому, будут одинаковы, а перестройка поля за временной интервал  $\Delta t$  между  $t_n$  и  $t_{n+1}$  окажется существенной и не зависящей от этих ошибок. Таким образом, модель, аппроксимирующая поле, достаточно чувствительна к его изменению при наличии переноса гидрофизического элемента, т.е. этот перенос улавливается изменениями величин частных производных по пространству за время  $t$ , которое является временным интервалом осреднения составляющих скоростей.

Использование для каждой точки (точнее, пары точек) отдельной статистической модели (1) соответствует гипотезе о локальной однородности и изотропности гидрофизического поля. Этот класс физических полей согласуется с реальными гидрофизическими полями океана. В целом же можно сказать, что рассматриваются поля, неоднородные по времени и пространству.

В обоснование использования уравнения адвекции для описания циркуляции вод введем формальный (статистический) параметр адвективного движения в море как критерий возможности применения уравнения переноса.

Поскольку вектор течения вычисляется между парой рядом лежащих измерений на горизонте, то важно, чтобы именно внутри этой пары не существовало значительных источников и стоков тепла и солей.

Если принять, что любое свойство  $f$  (температура, соленость, плотность и т.д.) определенной частицы воды за малый период времени между двумя моментами синхронизации  $t = t_i - t_{i-1}$  будет постоянным, то, согласно К.Эккарту [3], можно полагать, что изменение этого свойства в некоторой точке обуславливается только адвекцией, то есть  $df/dt = 0$ .

Такое можно уверенно предположить, так как расстояния между гидрологических станциями в натуральных экспериментах чаще всего выбираются порядка 30 миль (около 56 км). Даже крупномасштабные полигоны, выполненные высокоширотными экспедициями «Север» в СЛО, с расстояниями между станциями порядка 150 км, при слабой динамике крупномасштабных процессов и их большой инерции, по-видимому, тоже могут быть использованы для вычисления полей течений по уравнению адвекции, тем более что ледяной покров очень сильно ослабляет теплообмен с атмосферой.

Однако хотелось бы иметь некоторый количественный, хотя бы сравнительный, критерий оценки такой возможности.

Для этого необходимо учесть параметры интенсивности процессов в море (скорости течения  $v$ ) вместе со скоростью выполнения полигона  $V$ , которые учитываются введенным нами ранее безразмерным обобщенным параметром асинхронности  $\theta = v/V$ , который является количественной мерой степени асинхронности измерений на полигоне и интенсивности переноса свойств воды. Также это учитывается средним для конкретного полигона расстоянием между станциями, выраженным в общем количестве гидрологических станций  $N$  и характерным пространственным масштабом полигона  $L$ .

Следовательно, если считать, что чем ближе друг к другу измерения в море и чем меньше временной интервал между этими измерениями, тем меньше при вычислениях на величину переноса воды влияют внутренние силы и тем больше этот перенос определяется адвекцией. То есть адвективный перенос выделяется лучше и с минимальным искажением. Тогда безразмерный параметр идентификации адвекции  $B$  на полигоне может быть записан аналитически как:

$$B = \frac{N}{\theta \sigma_k}, \quad B = N \frac{V}{v \sigma_k}, \quad B = N \frac{V}{v}, \quad \text{или} \quad B = \frac{NL}{tv}. \quad (5)$$

Здесь необходимо уточнить, что  $\theta = v/V$  зависит также от размаха колебаний измеряемой величины  $X$ ,  $X_{max} - X_{min}$  ее или дисперсии  $\sigma_x$ , т.е. чем выше размах колебаний, тем выше асинхронность  $\theta = tv\sigma_x/L$ , где  $\sigma_x/L$  – удельная дисперсия, распределенная на характерный размер полигона  $L$ .

Поэтому для более корректного сравнения гидрологических полигонов Мирового океана, представленных в Приложении в работе [1], необходимо скорректировать их на величину их дисперсий.

То же самое необходимо учитывать при вычислении параметров адвекции. Тогда параметр идентификации адвекции  $B$  на полигоне может быть записан

$$B = \frac{N}{\theta \sigma_x}, \quad B = N \frac{V}{v \sigma_x}, \quad \text{или} \quad B = \frac{NL}{tv \sigma_x}. \quad (6)$$

При этом, естественно, с учетом величины дисперсии  $\sigma_x$ , будет учитываться динамичность района гидрологического полигона. В соответствии с этим изменятся гистограммы обобщенного параметра асинхронности  $\theta$  и параметра идентификации адвекции  $B$ , хотя закон распределения и не изменится – он останется нормальным.

Поскольку количество станций на полигоне  $N$ , в зависимости от характерного масштаба полигона  $L$ , определяет среднее расстояние между станциями и, следовательно, среднюю величину интервала времени между измерениями  $\Delta t$ , то величина  $B$  определяет статистическую обеспеченность использования гипотезы об адвективном характере циркуляции вод между соседними измерениями, т.е. корректность вычисления адвективного переноса на данном горизонте для данного полигона. И при таком локальном рассмотрении перенос вод определяется главным образом адвекцией. Перенос на полигонах вычисляется между парами рядом лежащих измерений на горизонте, то есть является локальным.

Из выведенных формул видно, что  $B$  – безразмерный параметр. Это определяет его универсальность и возможность использования для сравнения любых полигонов друг с другом с целью выяснения, какие из них могут быть использованы для вычисления полей течений по уравнению адвекции. Чем больше величина  $B$ , тем больше оснований использовать уравнение адвекции.

Здесь необходимо отметить важное обстоятельство – обобщенный параметр асинхронности и параметр идентификации адвекции  $B$  выведены аналитически для объектов с распределенными параметрами (в терминах теории динамических

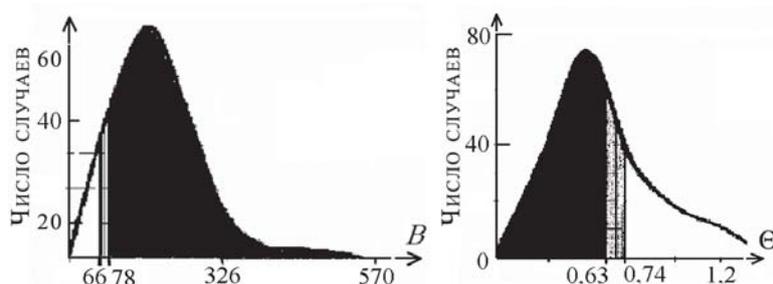


Рис. 1. Гистограммы распределения обобщенных статистических параметров идентификации адвекции  $B$  (слева) и параметров асинхронности  $\theta$  (справа) 182-х полигонов Мирового океана

систем), каковыми являются районы морей и океанов, а не лабораторным путем, как многие параметры гидравлики. Они часто используются при математическом моделировании в гидродинамике океана (числа Рейнольдса, Ричардсона, Фруда и т.д.), поэтому нет необходимости пользоваться теорией подобия при реализации модели адвекции.

Были вычислены параметры  $\theta$  и  $B$  для 182 гидрологических полигонов различных пространственно-временных масштабов, выполненных в Мировом океане за несколько последних десятилетий экспедициями на судах (иногда несколькими судами или самолетами) различных стран. По этим значениям были построены гистограммы распределения и  $B$  (рис. 1). Они близки, естественно, к нормальному закону, поскольку построены по обобщенному параметру  $\theta$ . Как видно из гистограммы для  $B$ , выполненные полигоны ложатся по величинам  $B$ , большей частью в пределы их значений  $B = 14 \dots 326$  с максимумом  $B = 139$ .

Из формул (5) хорошо видно, что при уменьшении асинхронности полигона  $\theta$  увеличивается величина  $B$ , а также что чем больше время выполнения измерений  $t$  на полигоне, тем меньше величина  $B$ . Следовательно, чем больше величина параметра идентификации адвекции  $B$ , тем больше оснований считать, что внутренние силы не сильно исказят вид реальной циркуляции в процесс выделения адвективного переноса.

В качестве примера приведем некоторые вычисленные поля векторов течений по полям гидрофизических элементов. На рис. 2 представлены вычисленные течения по полям температуры на полигоне, выполненном в июне 1971 г. в Северной Атлантике. Тонкими стрелками обозначены вычисленные векторы, а жирными — измеренные на буйковых станциях; жирные квадратики обозначают гидрологические станции полигона (1 мм вектора = 10 см/с), два крупных жирных квадрата — станции гидрологической съемки, ко времени выполнения которых производится парная синхронизация полей.

Две синхронизации производятся к середине временного интервала съемки с разрывом  $\Delta t = 4$  ч, т.е. к этому же интервалу относятся и представленные данные буйковых станций. Некоторое расхождение этих данных с вычисленными векторами (в пределах 10–15 % по модулю) можно объяснить тем, что в южной части полигона проходит гидрологический фронт, в районе которого течения на небольших расстояниях могут иметь резко меняющиеся направления. Наблюдения на буйковых станциях, расположенных в районе фронта, подтверждают на-

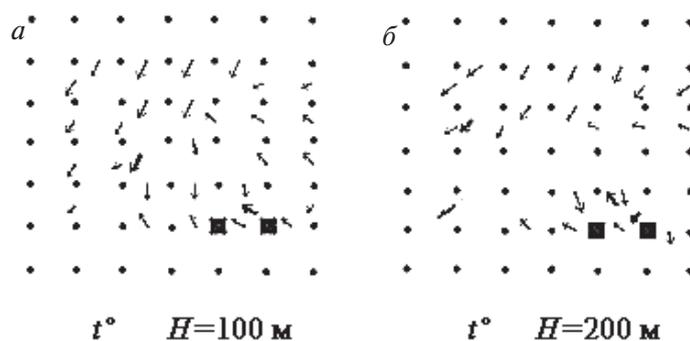


Рис. 2. Адвективный перенос вод на банке Рокколл по полю температуры на горизонтах 100 (а) и 200 м (б). Два квадрата — гидрологические станции, на время выполнения которых производилась парная синхронизация.

личие таких пульсаций. Как следует из (2) и системы уравнений (3), векторы вычисляются осредненными на интервалах, равных пространственной и временной дискретности выполнения станций полигона.

Хорошая адекватность вычисленных векторов течений измеренным на буйковых станциях позволяет считать, что потоки на полигоне определяются в основном адвекцией. При этом если учесть, что скорости течений на полигоне в основном находятся в пределах 25–30 см/с (22–26 км/сут), то обобщенные параметры асинхронности находятся в пределах  $\theta = 0,63 - 0,74$ , а параметры идентификации адвекции в пределах  $B = 78 - 66$  соответственно. Из этого можно сделать заключение, что, при этих значениях  $\theta$  возможно восстановление гидрофизических полей и тем более при меньших значениях, то есть в пределах  $\theta = 0 - 0,74$ . Точно так же можно определить пределы значений идентификации адвекции  $B > 66$ , когда возможно определять перенос на полигоне как адвективный. Таких полигонов около 85 % (из 182).

На графиках гистограмм  $\theta$  и  $B$  (рис. 1) эти зоны выделены черным цветом с переходными заштрихованными зонами.

Если рассмотреть эту проблему – оценки указанных критериев  $\theta$  и  $B$  – для другого более крупного полигона, например, гидрологической съемки всего СЛО в экспедиции «Север-25», то имеем характеристики: обобщенный параметр асинхронности  $\theta = 0,12$  и  $B = 1063$ , то есть эта съемка может считаться квазисинхронной и по ее скалярным полям можно проводить расчеты адвективных потоков в Северном Ледовитом океане на период выполнения измерений, поскольку они далеко не достигают своих пороговых значений [1].

Временной интервал между двумя (центральными на всем временном интервале выполнения съемки) моментами синхронизации  $\Delta t = t_2 - t_1$  для гидрологического полигона экспедиции «Север-25», выполненного в марте–мае 1973 г., был принят равным двум суткам. Для каждой пары измерений в скалярном поле гидрологических станций также строился отдельный полином, то есть производилась кусочно-полиномиальная аппроксимация (2) с парной синхронизацией и нахождением векторных полей (4).

Поля течений вычислялись для всех горизонтов 5, 50, 300, 500, 1000, 1500 и 2000 м по (4), скалярные поля которых ( $t^s, S\%_o, \sigma$ ), были измерены на полигоне. Все векторные поля представлены в приложении работы [1]. Интересно отметить, что векторы течений, вычисленные для одного горизонта, но по разным океанографическим элементам ( $t^s, S\%_o, \sigma$ ), в рамках векторного пространства – абсолютно идентичны для каждого горизонта. Это позволяет сделать выводы:

1. Используемая методология аналитического решения уравнения переноса субстанции (3) дает хорошую точность, что не обеспечит конечно-разностная аппроксимация при численном решении системы (4) или использование других известных гидротермодинамических моделей.

2. Основные потоки переноса вод (циркуляции) в СЛО имеют адвективный характер.

3. Эти вычисленные потоки согласуются с известными представлениями (к сожалению, только по математическим климатическим моделям) о характере циркуляции вод в бассейне.

4. Именно это пространственно-временное распределение гидрологических станций с соответствующим распределением измерений гидрофизических характеристик ( $t^s, S\%_o, \sigma$ ) на них дает возможность выделять адвективную составляющую циркуляции вод.

5. Последнее заставляет считать, что представленная методология дает более точное описание физики действующих механизмов динамики вод в СЛО.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Бензема В.Ю. Пространственно-временная изменчивость гидрофизических полей океана. СПб.: ААНИИ, 2004. 278 с.
2. Поляков И.В., Тимохов Л.А. Плотностная циркуляция Северного Ледовитого океана // Доклады РАН. 1995. Т. 342. № 2. С. 254–258.
3. Эккарт К. Гидродинамика океана и атмосферы. М.: Иностранная литература, 1963. 327 с.

V.YU.BENZEMAN

### MATHEMATICAL CRITERIA FOR CALCULATING THE FIELDS OF ADVECTIVE WATER TRANSPORT AND RESTORATION OF SCALAR FIELDS

*The paper suggests the analytically derived criteria of possibility to calculate the measured anisochronous hydro-physical fields on the World Ocean polygons using the advection equation with pair synchronization*

*Keywords:* criteria advection